ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

BÙI THỊ THU THỦY

QUAN HỆ HAI NGÔI
VÀ MỘT SỐ BÀI TOÁN LIÊN QUAN

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2019

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

BÙI THỊ THU THỦY

QUAN HỆ HAI NGÔI
VÀ MỘT SỐ BÀI TOÁN LIÊN QUAN

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp

Mã số: 8 46 01 13

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

TS. Trần Nguyên An

THÁI NGUYÊN - 2019

Mục lục

Mở đầu

Cho A, B là các tập hợp. Một *quan hệ hai ngôi* từ tập A đến tập B là một tập con của tập tích Đề các $A \times B$. Đặc biệt, một quan hệ hai ngôi từ A đến A được gọi là một *quan hệ hai ngôi trên* A. Nếu R là một quan hệ hai ngôi trên tập A và $(a, b) \in R$ thì ta kí hiệu aRb (đọc là a có quan hệ R với b). Quan hệ hai ngôi xuất hiện trong nhiều ngành khác nhau của toán học: Đại số, Số học, Hình học, Lý thuyết đồ thị, Khoa học máy tính, ... Một trường hợp đặc biệt của quan hệ hai ngôi. Các quan hệ hai ngôi điển hình trong chương trình phổ thông là "quan hệ chia hết", "quan hệ đồng dư", "quan hệ lớn hơn", "quan hệ song song", hàm số, ... Ta thường quan tâm đến các tính chất sau của quan hệ hai ngôi phản xạ (reflexive), đối xứng (symmetric), bắc cầu (transitive), bất đối xứng (asymmetric), phản đối xứng (antisymmetric), bất phản xạ (irreflexive). Mục đích chính của luận văn là tìm hiểu một số bài toán tổ hợp về quan hệ hai ngôi. Tài liệu chính của luận văn là giải một số bài tập trong [7], [2] và bài báo [6].

Luận văn được chia làm hai chương. Chương 1 trình bày một số kiến thức chuẩn bị về lý thuyết quan hệ hai ngôi, quan hệ tương đương, quan hệ thứ tự, ánh xạ và mở đầu về lý thuyết tổ hợp. Tuy là kiến thức chuẩn bị cho Chương 2 nhưng đối với tác giả nhiều kiến thức của chương là kiến thức mới và có nhiều ứng dụng trong giải toán phổ thông. Chương này chủ yếu tham khảo theo các tài liệu [1, 2].

Chương 2 theo tài liệu [6, 7] là chương chính của luận văn trình bày về một số bài toán liên quan đến quan hệ hai ngôi. Bắt đầu là bài toán đếm một số quan hệ hai ngôi đặc biệt. Cũng cần phải nói thêm rằng quan hệ hai ngôi xuất phát từ những vấn đề trong toán sơ cấp như "lý thuyết chia hết", "lý thuyết đồng dư" nhưng vì khuôn khổ của luận văn tác giả chỉ khai thác một số bài toán sơ cấp liên quan đến bài toán tổ hợp. Một lưu ý của luận văn là tác giả cố gắng tìm hiểu nhiều cách giải, cách tiếp cận khác nhau của một bài toán, một vấn đề. Đếm quan hệ hai ngôi là ánh xạ và các trường hợp đặc biệt (đơn ánh, song ánh, toàn ánh) được trình bày trong mục thứ hai của chương. Việc nghiên cứu số toàn ánh gợi ý cho ta tìm hiểu số Stirling loại hai và bài toán đếm số phân hoạch một tập hợp. Vấn đề này được trình bày trong mục thứ ba của chương. Mục cuối của chương tìm hiểu số quan hệ tương đương, số quan hệ bắc cầu (liên hệ với quan hệ thứ tự) theo bài báo [6]. Chú ý rằng số quan hệ tương đương trên tập n phần tử chính là số phân hoạch, số Bell thứ n.

Trong quá trình làm luận văn, tôi nhận được sự hướng dẫn và giúp đỡ tận tình của TS. Trần Nguyên An - Trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên. Tôi xin được bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến thầy.

Tôi xin gửi lời cảm ơn chân thành đến quý thầy cô giảng dạy lớp Cao học khóa Cao học Toán khóa 11B (2017-2019) - trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên, đã truyền thụ đến cho tôi nhiều kiến thức và kinh nghiệm nghiên cứu khoa học.

Lời cuối cùng, tác giả muốn dành để tri ân bố mẹ và gia đình vì đã chia sẻ những khó khăn để tác giả hoàn thành công việc học tập của mình.

Thái Nguyên, ngày 28 tháng 10 năm 2019

Tác giả

Bùi Thị Thu Thủy

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

1.1. Quan hệ hai ngôi

Định nghĩa 1.1.1. Một *quan hệ hai ngôi* từ tập A đến tập B là một tập con của tập tích Đề các $A \times B$. Đặc biệt, một quan hệ hai ngôi từ A đến A được gọi là một *quan hệ hai ngôi trên* A. Nói cách khác, một quan hệ hai ngôi trên một tập A là một tập con của tập A^2.

Ta thường kí hiệu các quan hệ hai ngôi bằng các chữ cái R (hay $S, T, U, V, \ldots$). Nếu R là một quan hệ hai ngôi trên tập A và $(a, b) \in R$ thì ta kí hiệu aRb (đọc là a có quan hệ R với b, hoặc nói tắt là a R b). Khi $(a, b) \notin R$ thì ta viết $\overline{aRb}$ (đọc là a không có quan hệ R với b). Ta thường quan tâm đến các tính chất sau của quan hệ hai ngôi.

Định nghĩa 1.1.2. Giả sử $R \subseteq A \times A$ là quan hệ hai ngôi. Quan hệ hai ngôi R được gọi là

(i) Phản xạ (reflexive) nếu $\forall a \in A, ((a, a) \in R)$;

(ii) Đối xứng (symmetric) nếu $\forall a, b \in A, ((a, b) \in R$ thì $(b, a) \in R)$;

(iii) Bắc cầu (transitive) nếu $\forall a, b, c \in A, ((a, b) \in R \wedge (b, c) \in R$ thì $(a, c) \in R)$;

(iv) Bất đối xứng (asymmetric) nếu $\forall a, b \in A, ((a, b) \in R$ thì $(b, a) \notin R)$;

(v) Phản đối xứng (antisymmetric) nếu $\forall a, b \in A, [((a, b) \in R \wedge (b, a) \in R)$ thì $a = b]$;

(vi) Bất phản xạ (irreflexive) nếu $\forall a \in A, ((a, a) \notin R)$.

Ví dụ 1.1.3. Cho $A = \{1, 2, 3\}$. Xét các quan hệ
$R_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$,

$R_2 = \{(1,1),(1,2),(1,3)\}$,

$R_3 = A \times A$,

$R_4 = \{(2,2),(3,3),(1,2)\}$. Ta có với T ký hiệu True, F ký hiệu False.

	R_1	R_2	R_3	R_4
Phản xạ	T	F	T	F
Đối xứng	T	F	T	F
Bắc cầu	T	T	T	T

Ví dụ 1.1.4. Cho $A = \{1,2,3,4\}$. Xét các quan hệ.

$R_1 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(2,1),(4,3),(3,2)\}$,

$R_2 = A \times A$,

$R_3 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(2,1),(4,3),(4,1),(3,2)\}$,

$R_4 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,2),(2,1),(4,3),(3,4)\}$.

	PX	ĐX	PĐX	ĐX	BPX	BC
R_1	F	F	F	T	F	F
R_2	T	T	F	F	F	T
R_4	T	T	F	T	F	T
R_5	T	T	F	F	F	T

Chú ý ta viết tắt: PX = Phản xạ, ĐX = Đối xứng, PĐX = Phản đối xứng, BPX = Bất phản xạ, BC = Bắc cầu.

Định nghĩa 1.1.5. (i) Một quan hệ hai ngôi trên tập A được gọi là *quan hệ tương đương* nếu nó có các tính chất phản xạ, đối xứng và bắc cầu. Theo truyền thống, các quan hệ tương đương thường được kí hiệu bởi dấu $\sim$.

(ii) Cho $\sim$ là một quan hệ tương đương trên tập A. Với mỗi $a \in A$, ta gọi *lớp tương đương* của a đối với quan hệ tương đương $\sim$, kí hiệu bởi $[a]_\sim$ (hay $[a]$, hay $\overline{a}$, hay $C(a)$), đó là một tập con của A được xác định bởi

$$[a] = \{b \in A \ \mid \ b \sim a\}.$$

Đồng thời, tập hợp tất cả các lớp tương đương của các phần tử trong A được gọi là *tập thương* của A theo quan hệ tương đương $\sim$, và được kí hiệu là $A/\sim$. Như vậy, ta có biểu diễn

$$A/\sim \; = \; \{[a] \mid a \in A\}.$$

Ví dụ 1.1.6. Cho m là một số tự nhiên lớn hơn 1. Trên tập $\mathbb{Z}$ các số nguyên ta định nghĩa quan hệ hai ngôi R như sau: với mọi $a, b \in \mathbb{Z}$, ta nói

$$aRb \ \Leftrightarrow \ m|(a-b).$$

Quan hệ này được gọi là *quan hệ đồng dư theo môđun* m (hay còn gọi là *quan hệ đồng dư modulo* m). Khi a đồng dư b theo môđun m, ta thường kí hiệu là

$$a \equiv b \pmod{m}.$$

Ta thấy đó là một quan hệ tương đương trên tập $\mathbb{Z}$. Với $a \in \mathbb{Z}$, lớp tương đương của a được kí hiệu bởi $\overline{a}$, và được gọi là một *lớp thặng dư* theo môđun m với đại diện là a. Tập thương của $\mathbb{Z}$ đối với quan hệ đồng dư modulo m được kí hiệu bởi $\mathbb{Z}_m$ và được gọi là *tập các lớp thặng dư* theo môđun m (hay tập hợp các lớp thặng dư modulo m). Cho $a \in \mathbb{Z}$, khi đó ta có

$$\overline{a} = \{b \in \mathbb{Z} \mid b \equiv a \pmod{m}\} = \{b \in \mathbb{Z} \mid b - a \text{ chia hết cho } m\}.$$

Với mỗi $a \in \mathbb{Z}$ đã cho, ta luôn có biểu diễn $a = mq + r$ trong đó $0 \leq r \leq m-1$ (theo định lý phép chia với dư). Khi đó $b - a = b - mq - r$, nên ta có

$$\overline{a} = \{b \in \mathbb{Z} \mid b - mq - r \text{ chia hết cho } m\} = \{b \in \mathbb{Z} \mid b - r \text{ chia hết cho } m\} = \overline{r}.$$

Hơn nữa, với mọi số tự nhiên i, j sao cho $0 \leq i < j \leq m - 1$ ta luôn có $0 < j - i < m$ nên $j - i$ không chia hết cho m. Do đó $i \not\equiv j \pmod{m}$, nên $\overline{i} \neq \overline{j}$. Vì thế tập $\mathbb{Z}_m$ gồm m phần tử đôi một khác nhau như sau:

$$\mathbb{Z}_m = \{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{m-1}\}.$$

Chú ý rằng nếu $a = mq + r$ thì $\overline{a} = \overline{r}$. Vì thế với $q_1, \ldots, q_m$ là m số nguyên tuỳ ý ta luôn có

$$\mathbb{Z}_m = \{\overline{q_1 m},\ \overline{q_2 m + 1},\ \ldots,\ \overline{q_m m + m - 1}\}.$$

Chẳng hạn $\mathbb{Z}_3 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\} = \{\overline{6}, \overline{-2}, \overline{8}\}$.

Định lý dưới đây cho ta ý nghĩa của các quan hệ tương đương. Trước khi phát biểu định lý, chúng ta cần khái niệm sau.

Định nghĩa 1.1.7. Cho A là một tập hợp. Ta gọi *một phân hoạch* (hay *một sự chia lớp*) trên A là một phép phân chia tập A thành một họ các tập con khác rỗng $\{A_i\}_{i \in I}$ thoả mãn các điều kiện:

(i) $A_i \cap A_j = \emptyset$ với mọi $i, j \in I, i \neq j$.

(ii) $A = \bigcup\limits_{i \in I} A_i$.

Định lý 1.1.8. *Cho A là một quan hệ tương đương trên tập A. Khi đó các phát biểu sau là đúng.*

(i) $[a] \neq \emptyset$ *với mọi* $a \in A$.

(ii) $A = \bigcup_{a \in A} [a]$.

(iii) $[a] = [b]$ *hoặc* $[a] \cap [b] = \emptyset$ *với mọi* $a, b \in A$.

Vì thế quan hệ tương đương $\sim$ xác định một phân hoạch trên A. Ngược lại, nếu $\{A_i\}_{i \in I}$ là một phân hoạch trên A thì tồn tại duy nhất một quan hệ tương đương trên A sao cho mỗi A_i là một lớp tương đương.

Định nghĩa 1.1.9. (i) Một quan hệ hai ngôi trên một tập hợp được gọi là *quan hệ thứ tự* nếu nó có các tính chất phản xạ, phản đối xứng, và bắc cầu. Quan hệ thứ tự thường được kí hiệu bởi dấu "$\leq$" (đọc là "nhỏ hơn hoặc bằng"). Khi $a \leq b$ thì ta cũng viết $b \geq a$.

(ii) Khi trên một tập hợp A có một quan hệ thứ tự $\leq$ thì ta nói A là một *tập hợp được sắp thứ tự* bởi $\leq$.

Ví dụ 1. (i) Quan hệ nhỏ hơn hoặc bằng $\leq$ thông thường (ta đã biết ở phổ thông) là quan hệ thứ tự trên các tập $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, và $\mathbb{R}$.

(ii) Quan hệ bao hàm $\subseteq$ trên tập 2^A (tập tất cả các tập con của A) là một quan hệ thứ tự.

(iii) Quan hệ chia hết "$|$" trên tập $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ là một quan hệ thứ tự.

(iv) Xét A là tập con tùy ý của tập $\mathbb{N}^*$. Khi đó quan hệ chia hết "$|$" trên tập A cũng là một quan hệ thứ tự trên A.

Mục cuối giới thiệu lớp quan hệ hai ngôi đặc biệt là ánh xạ.

Định nghĩa 1.1.10. Cho R là quan hệ 2 ngôi từ A đến B. Khi đó *miền xác định* của R (domain of R), ký hiệu $D(R)$ được định nghĩa là tập

$$\{x | x \in A; \exists y \in A, (x, y) \in R\}.$$

Ảnh của R (image of R), ký hiệu $\mathrm{im}(R)$ được định nghĩa là tập

$$\{y | y \in B, \exists x \in A, (x, y) \in R\}.$$

Ví dụ 1.1.11. Cho $A = \{4, 5, 7, 8, 9\}$ và $B = \{16, 18, 20, 22\}$, $R = \{(4, 16), (4, 20), (5, 20), (8, 16), (9, 18)\}$. Khi đó R là quan hệ 2 ngôi từ A đến B, $D(R) = \{4, 5, 8, 9\}$, $\mathrm{im}(R) = \{16, 18, 20\}$.

Định nghĩa 1.1.12. (i) Cho A, B là các tập khác rỗng. Một quan hệ hai ngôi f từ A đến B được gọi là một *ánh xạ* nếu

(1) $D(f) = A$ (tức là $\forall a \in A, \exists b \in B, (a, b) \in f$),

(2) Với mọi $(a, b), (a, b) \in f, a = a$ kéo theo $b = b$.

Một cách tương đương một ánh xạ f từ tập A đến tập B là một quy tắc cho tương ứng mỗi phần tử $a \in A$ với một phần tử duy nhất $b \in B$. Khi đó ta viết $f(a) = b$, ta gọi b gọi là *ảnh* của phần tử a bởi ánh xạ f; và ta gọi a là một *tạo ảnh* của phần tử b. Tập A được gọi là *tập nguồn*, tập B gọi là *tập đích* của ánh xạ f. Để diễn tả ánh xạ f như trên người ta kí hiệu:

$$A \xrightarrow{f} B,\ a \mapsto f(a) = b,\ \text{hoặc}$$

$$f : A \to B, a \mapsto f(a) = b,\ \text{hoặc}$$

$$\begin{aligned} f : A &\to B \\ a &\longmapsto f(a) = b. \end{aligned}$$

(ii) Ta quy ước rằng có một *ánh xạ rỗng* từ tập $\emptyset$ đến tập B bất kì.

(iii) Cho ánh xạ $f : A \to B, a \mapsto f(a)$. Ta gọi tập hợp con $G(f)$ của $A \times B$ xác định bởi

$$G(f) = \{(a, f(a)) \mid a \in A\}$$

là *đồ thị* của ánh xạ f.

(iv) Hai ánh xạ được gọi là *bằng nhau* nếu chúng có chung nguồn, chung đích và chung đồ thị. Nói cách khác, cho $f : A \to B$ và $g : A' \to B'$ là hai ánh xạ, khi đó $f = g$ nếu $A = A',\ B = B'$ và $f(a) = g(a)$ với mọi $a \in A$.

Định nghĩa 1.1.13. Cho $f : A \longrightarrow B,\ a \mapsto b = f(a)$ là một ánh xạ.

(i) f được gọi là *đơn ánh* nếu $f(a) = f(a')$ kéo theo $a = a'$ với mọi $a, a' \in A$.

(ii) f được gọi là *toàn ánh* nếu với mọi $b \in B$ kéo theo tồn tại $a \in A$ để $f(a) = b$.

(iii) f được gọi là *song ánh* nếu nó vừa là đơn ánh vừa là toàn ánh.